

改进型赫姆霍兹线圈磁场均匀性及实用性分析

郭玉川^a, 庾晏斌^b, 文小辉^b, 康明铭^a

(四川大学 a. 物理科学与技术学院; b. 电气信息学院, 四川 成都 610065)

摘要: 基于对赫姆霍兹线圈磁场均匀性的基本分析, 得到了获得均匀度更高的磁场的必要条件. 通过增加一组共轴平行放置的小半径赫姆霍兹线圈, 提高了磁感应强度, 磁场也更均匀. 再利用 Matlab 数值计算, 描述改进装置产生磁场的轴向分布与空间分布, 展现其相对于普通赫姆霍兹线圈的优越之处.

关键词: 赫姆霍兹线圈; 磁感应强度; 均匀度

中图分类号: O441.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-4642(2015)11-0042-05

匀强磁场在技术领域和物理实验方面都有着重要的作用^[1]. 在实验室中, 一定区域范围的匀强磁场可以通过赫姆霍兹线圈来获得. 由于赫姆霍兹线圈结构简单又能产生均匀性较好的磁场, 因而成为磁测量等物理实验的重要组成部分^[2], 但由于赫姆霍兹线圈产生磁场的均匀性和强度不高, 而限制了其应用.

本文提出一种基于赫姆霍兹线圈的改进方法, 得到产生磁感应强度和均匀度均高于普通赫姆霍兹线圈的装置. 通过对其产生磁场空间分布的模拟, 展现出它相对于普通赫姆霍兹线圈的优越性, 为获得高强度高均匀度磁场提供一种方法.

1 赫姆霍兹线圈

半径均为 R 的赫姆霍兹线圈共 x 轴平行放置, 其圆心距离原点均为 D (图 1).

赫姆霍兹线圈在中心轴线上产生的磁感应强度为

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2} \left\{ [R^2 + (D+x)^2]^{-\frac{3}{2}} + [R^2 + (D-x)^2]^{-\frac{3}{2}} \right\},$$

对方程进行泰勒展开, 即

$$B_1(x) = B_1(0) + B_1'(0)x + \frac{B_1''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{B_1^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{B_1^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

分析可知, 要获得均匀度更高的磁场, 需要尽可能

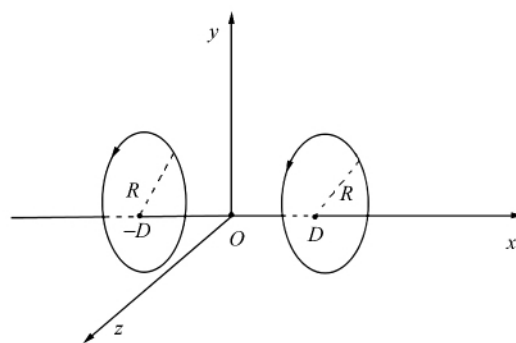


图 1 赫姆霍兹线圈

多的使得函数 $B(x)$ 的各阶导数在 $x=0$ 时为零, 这样函数就更加逼近常数 $B_1(0)$, 磁场也就变得更加均匀.

对方程进行多阶求导, 可以发现赫姆霍兹线圈的奇特性质^[2].

1) 方程的一阶导数在 $x=0$ 时为 0, 其二阶导数在满足条件 $R=2D$ 时为 0:

$$\left. \frac{dB_1}{dx} \right|_{x=0} = 0;$$
$$\left. \frac{d^2 B_1}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2} \left[\frac{30D^2}{(D^2 + R^2)^{7/2}} - \frac{6}{(D^2 + R^2)^{5/2}} \right].$$

当 $R=2D$ 时,

$$\left. \frac{d^2 B_1}{dx^2} \right|_{x=0} = 0.$$

2) 对于赫姆霍兹线圈的高阶导数 ($n \geq 3$) 有如下规律:

收稿日期: 2015-05-06; 修改日期: 2015-08-19

作者简介: 郭玉川(1994-), 男, 四川绵阳人, 四川大学物理科学与技术学院 2012 级本科生.

指导教师: 康明铭(1984-), 男, 辽宁朝阳人, 四川大学物理科学与技术学院讲师, 博士, 从事宇宙线实验和理论、早期宇宙、等离子体物理的研究.

$$\begin{cases} \left. \frac{d^n B}{dX^n} \right|_{x=0} = 0, n \text{ 为奇数;} \\ \left. \frac{d^n B}{dX^n} \right|_{x=0} \neq 0, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

依照普通赫姆霍兹线圈的性质,采取适当措施,可以设计出产生磁场的均匀度更高的线圈组,即本文提出的共轴四线圈组。

2 共轴四线圈组

2.1 共轴四线圈组磁场均匀性条件

根据之前的分析,要将磁场变得更加均匀,需要使方程更多的高阶导数为零。当满足条件 $R=2D$ 时,其二阶导数为零,若能使得方程的四阶导数也为零,则前 5 项之和就为常数 $B(0)$ 。自然地,所得到的磁场的均匀度也就会变得更高。

考虑加入 1 组共 X 轴平行放置的小半径赫姆霍兹线圈,通以方向相反的电流,组成共轴四线圈组(图 2)。

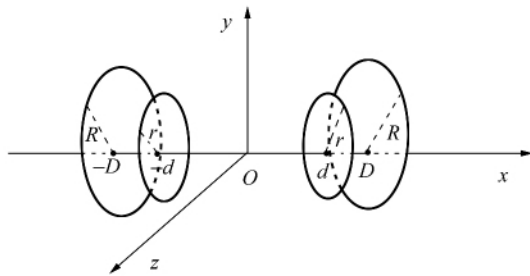


图 2 共轴四线圈组

其中小线圈半径为 r ,圆心到原点的距离为 d ,同样地,满足条件 $r=2d$,使小线圈组的二阶导数为零。

对于此时的 2 组线圈在 x 轴线方向上磁感应强度为

$$\begin{aligned} B(x) = & B_1(x) + B_2(x) = \\ & \frac{u_0 I_1 R^2}{2} \{ [R^2 + (D+x)^2]^{-\frac{3}{2}} + \\ & [R^2 + (D-x)^2]^{-\frac{3}{2}} \} - \\ & \frac{u_0 I_2 r^2}{2} \{ [r^2 + (d+x)^2]^{-\frac{3}{2}} + \\ & [r^2 + (d-x)^2]^{-\frac{3}{2}} \}. \end{aligned}$$

对于共轴四线圈组,其四阶导数为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 B}{dx^4} \right|_{x=0} = & -\frac{1}{125} \frac{368 \sqrt{5} u_0 I_1}{R^5} + \frac{1}{125} \frac{368 \sqrt{5} u_0 I_2}{r^5} = \\ & \frac{1}{125} \frac{368 \sqrt{5}}{u_0} \left(\frac{I_2}{r^5} - \frac{I_1}{R^5} \right). \end{aligned}$$

当 $\frac{I_1}{R^5} = \frac{I_2}{r^5}$, $\left. \frac{d^4 B}{dx^4} \right|_{x=0} = 0$,即得到共轴四线圈磁场均匀性条件:

$$R=2D; r=2d; \frac{I_1}{R^5} = \frac{I_2}{r^5}.$$

2.2 共轴四线圈组磁场分析

对匀强磁场而言,磁场的强度与均匀度都是非常重要的指标。经简单分析就会发现:在引入小线圈组后,产生的磁感应强度会有一定下降而线圈组磁场均匀度却会明显增强。

2.2.1 共轴四线圈组磁感应强度分析

由于是在普通赫姆霍兹线圈基础上组成的 2 组通有反向电流的共轴四线圈组,磁感应强度必然会有所降低。因此更希望磁感应强度的损失能在很小的范围内,从而减小其不利影响。

分析引入小线圈之后对磁感应强度的影响。

当 $R=ar$,并且 $R=2D, r=2d, I_1 = \frac{R^5}{r^5} I_2$,有

$$B|_{x=0} = \frac{8\sqrt{5} u_0 I_1}{25 R} \left(1 - \frac{1}{a^4} \right).$$

可发现,在引入小线圈组之后,磁感应强度的下降取决于 a 的值。如:当 $a=2$,即 $R=2r$;磁感应强度为原来的 93.75%;当 $a=3$,即 $R=3r$;磁感应强度为原来的 98.77%。因此,在适当取 a 值后,小线圈组对原来磁感应强度几乎没有影响。

2.2.2 共轴四线圈组磁场均匀度分析

为对磁场在 x 轴方向与空间上的均匀度进行定量分析,现对各变量取值:

$$R=2D=10 \text{ cm}; I_1=32 \text{ A};$$

$$r=2d=5 \text{ cm}; I_2=-1 \text{ A}.$$

用 Matlab 对线圈产生的磁场大小在 $x \in [-2.5 \text{ cm}, 2.5 \text{ cm}]$ 范围内进行模拟(如图 3~4 所示)。

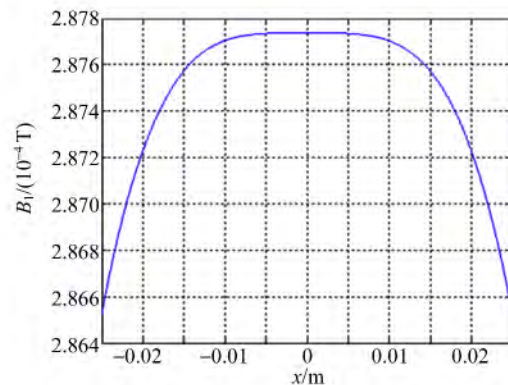
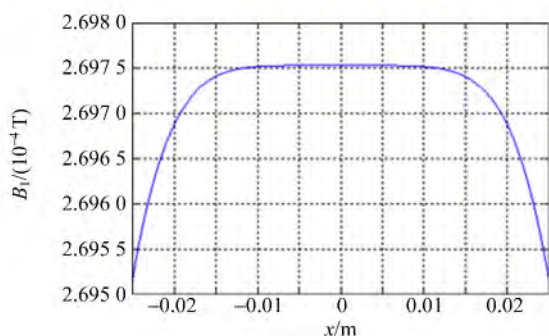
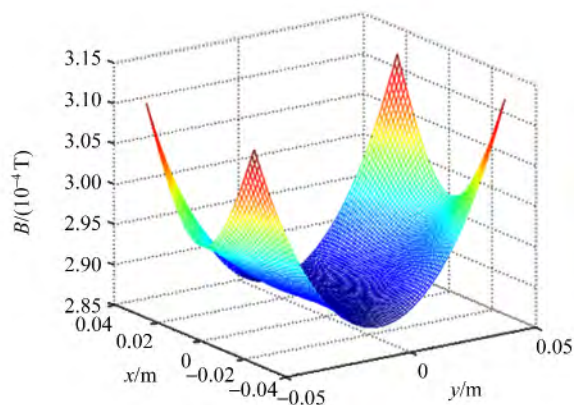
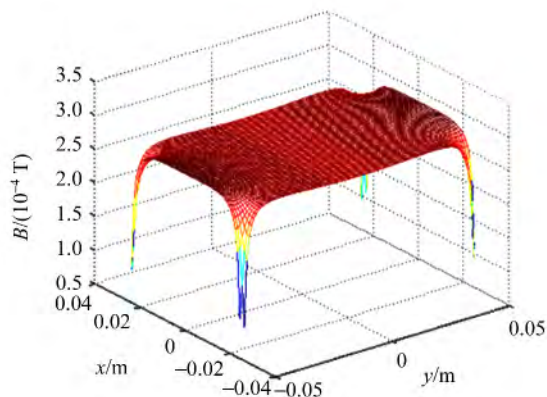


图 3 赫姆霍兹线圈产生磁场在 x 轴方向分布

图 4 共轴四线圈组产生磁场在 x 轴方向分布

对线圈组磁感应强度在空间上的分布 $x \in [-2.5 \text{ cm}, 2.5 \text{ cm}]$, $z \in [-2.5 \text{ cm}, 2.5 \text{ cm}]$ 进行模拟如图 5~6 所示。

图 5 赫姆霍兹线圈产生磁场在 (x, z) 方向的分布图 6 共轴四线圈组产生磁场在 (x, z) 方向分布

根据模拟结果可知:普通赫姆霍兹线圈在 $x \in [-2.5 \text{ cm}, 2.5 \text{ cm}]$ 范围内的磁感应强度极差为 $1.2 \times 10^{-6} \text{ T}$, 而共轴四线圈组在该范围的磁感应强度极差为 $2.3 \times 10^{-7} \text{ T}$ 。

为研究问题的方便,定义无量纲量轴向均匀度 η , 表示产生磁场强度极差与中心磁场强度比值^[3]: $\eta = \frac{\Delta B_{\max}}{B_0}$ 。

因此,普通赫姆霍兹线圈 $\eta = 0.42\%$, 四共轴赫姆霍兹线圈 $\eta' = 0.085\%$ 。在通过加载负向电流的共 x 轴小赫姆霍兹线圈后, 磁场强度在 x 轴方向上的均匀度变为了原来的 4.9 倍, 而磁感应强度只减小了原来的 6.25%。

3 改进型共轴四线圈组

根据以上分析,在加载了通有反向电流的共轴小线圈组之后,线圈组的磁场均匀性有了很大的提高,适当选择 a 值,磁场也不会有明显的下降。但其产生的磁感应强度较低,而几乎不具备实用性。现提出一种改进型的赫姆霍兹线圈组,在增大产生磁感应强度的同时,又保证了磁场的均匀度。

3.1 改进型共轴线圈组组成基本思路

该改进型的赫姆霍兹线圈组在保持通有的电流不变的情况下,通过增加线圈组的匝数,以提高产生的磁场强度。而增加的线圈组都严格保持条件: $R = 2D$, $r = 2d$, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R^5}{r^5}$, 以保证磁场的高均匀度。装置结构简图如图 7 所示,细节图如图 8 所示。

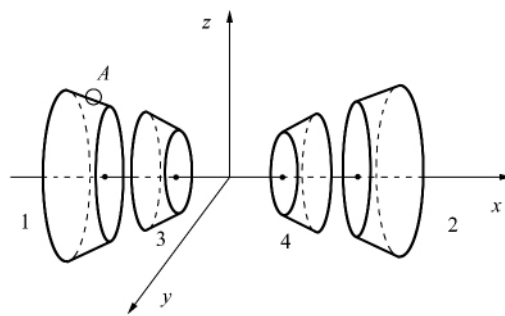


图 7 改进型共轴线圈组装置简图

如图 7 所示,将线圈缠绕为单层的空心圆柱体。其中线圈组 1 和 2 为大线圈组,线圈组 3 和 4 为小线圈组。对于 4 个线圈的任意一点的横截面,例如 A 点,都具有如图 8 的结构(两相邻线圈按被紧密缠绕)。其中,线圈半径均为 ϵ , 线圈 1 距离中轴线距离为 R , 且 $R = 2D$; 线圈 2 距离中轴线距离为 R' , 且 $R' = 2D'$ 。因缠绕而在轴线方向

增加的距离 C 也应满足 $A = 2C$. 由 $B = 2\epsilon$, $C = \frac{2}{\sqrt{5}}\epsilon, A = \frac{4}{\sqrt{5}}\epsilon$ 得: $\theta = \arctan 2$. 由 $R' = R + \frac{4}{\sqrt{5}}\epsilon, r' = r + \frac{4}{\sqrt{5}}\epsilon'$, 得

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R^5}{r^5} = \frac{R'^5}{r'^5} = \frac{\left(R + \frac{4}{\sqrt{5}}\epsilon\right)^5}{\left(r + \frac{4}{\sqrt{5}}\epsilon'\right)^5} = \frac{\epsilon^5}{\epsilon'^5}.$$

当 $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = 2$ 时, $\frac{\epsilon'}{\epsilon} = 2$. 即小线圈组使用线圈的半径为大线圈组使用线圈的 $1/2$.

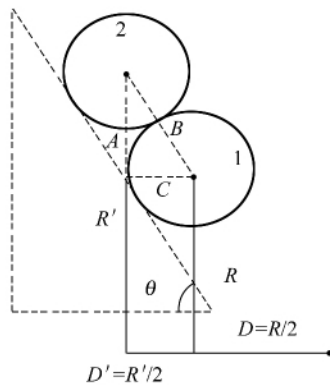


图 8 改进型共轴线圈组装置细节图

当 4 个线圈均缠绕相同总匝数时(处于相同匝数处的线圈组构成共轴四线圈组), 并按照 $\theta = \arctan 2$ 的方式缠绕就能在既保证产生磁场均匀度的同时, 又增大了产生磁感应强度的大小.

3.2 改进型共轴线圈组磁场分析

3.2.1 改进型共轴线圈组磁场方程

要计算整个装置产生磁场随距离变化的方程 $B'(x)$. 首先计算出图 9 所示的线圈组产生的磁场方程.

对于坐标系中任意一个距离原点为 D 的线圈, 其半径为 R , 在 x 处产生的磁场为

$$dB_{1,3}' = \frac{u_0 R^2 dI}{2[R^2 + (D+x)^2]^{3/2}},$$

由 $dI = nI dD, R = 2D$, 得

$$dB_{1,3}' = \frac{u_0 nI (2D)^2}{2[(2D)^2 + (D+x)^2]^{3/2}} dD,$$

$$B_{1,3}'(x) = \int_{D_1}^{D_2} \frac{u_0 nI (2D)^2}{2[(2D)^2 + (D+x)^2]^{3/2}} dD.$$

解得其积分为

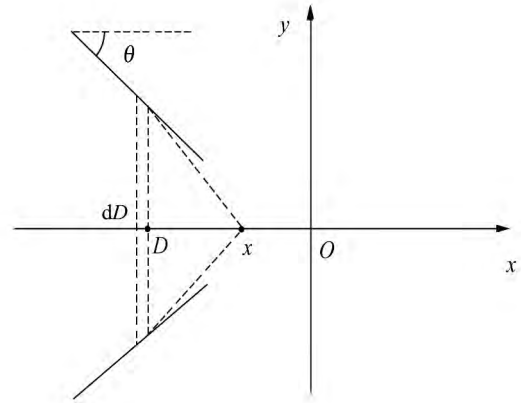


图 9 线圈组产生磁场分析简图

$$B(x) = \frac{u_0 nI}{2} \left[\frac{4\sqrt{5} \ln \left[\frac{\sqrt{x^2 + 2Dx + 5D^2} + \sqrt{5}(x+5D)}{5} \right]}{25} - \frac{(-x^3 + 3Dx^2)}{5x^2 \sqrt{x^2 + 2Dx + 5D^2}} \right] \Bigg|_{D_1}^{D_2}.$$

确定装置 1 和 3 的大小后, 就可得到 $B_1'(x)$ 和 $B_3'(x)$ 的表达式, 对装置 2 和 4 有:

$$dB_{2,4}' = \frac{u_0 R^2 dI}{2[R^2 + (D-x)^2]^{3/2}},$$

$$B_{2,4}'(x) = \int_{D_m}^{D_n} \frac{u_0 nI (2D)^2}{2[(2D)^2 + (D-x)^2]^{3/2}} dD.$$

解得其积分为

$$B_{2,4}'(x) = \frac{u_0 nI}{2} \left\{ -\frac{(x^3 + 3Dx^2)}{5x^2 \sqrt{x^2 - 2Dx + 5D^2}} + \frac{4\sqrt{5} \ln \left[\frac{\sqrt{x^2 - 2Dx + 5D^2} - \sqrt{5}(x-5D)}{5} \right]}{25} \right\} \Bigg|_{D_m}^{D_n}.$$

在确定装置 2 和 4 的大小后, 可得到 $B_2'(x)$ 和 $B_4'(x)$ 的表达式.

因此整个改进型装置产生的磁场方程:

$$B'(x) = B_1'(x) + B_2'(x) + B_3'(x) + B_4'(x).$$

3.2.2 改进型共轴线圈组磁感应强度与均匀度分析

为方便对改进型共轴线圈组的磁场分析, 现作简单赋值. 对线圈组 1, 2: $D_1 = 6 \text{ cm}, D_2 = 5 \text{ cm}, I_1 = 32 \text{ A}$; 对线圈组 3, 4: $D_3 = 3 \text{ cm}, D_4 = 2.5 \text{ cm}, I_2 = -1 \text{ A}$; 且线圈组 1, 2 有 10 匝/cm 线圈, 线圈组 3, 4 有 20 匝/cm 线圈.

对产生磁场在 $x \in [-2.5 \text{ cm}, 2.5 \text{ cm}]$ 范围进行模拟(图 10).

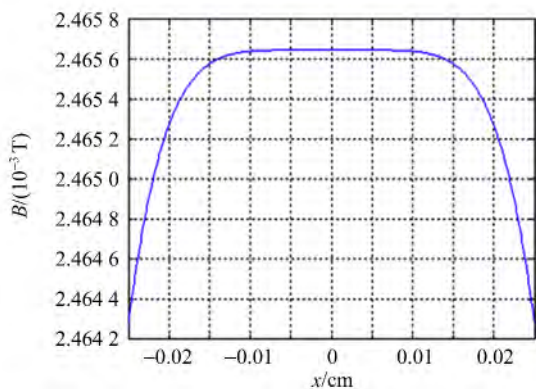


图 10 改进型共轴四线圈组产生磁场在 x 轴方向分布

根据图 10 所示:在该范围磁感应强度大约为 2.46×10^{-3} T. 磁感应强度的极差大约为 1.33×10^{-6} T. 强度大约变为共轴四线圈组的 10 倍. 改进型共轴线圈的无量纲值 $\eta=0.0539\%$.

可以发现:仅通过在 x 轴向方向增加很少量的线圈,就能使得磁感应强度有很大的提高,而且均匀度几乎不变. 故改进型共轴线圈组在保留了原来共轴四线圈组高均匀度的情况下,提高了装置产生的磁感应强度.

4 结束语

相较于普通赫姆霍兹线圈,改进型共轴线圈组在产生磁感应强度与均匀度上均有很大提高,但产生的磁感应强度仍不高,使得该装置仍有进一步的改进空间,以进一步满足实用性. 例如:继续增加缠绕的线圈匝数;在允许磁场均匀度有所降低,将整个装置改变为多层,使磁感应强度进一步增强.

致谢:感谢康明铭老师在理论分析与数值模拟方面的指导与帮助.

参考文献:

- [1] 张引科, 咎会萍. 3 个共轴圆线圈形成的匀强磁场 [J]. 物理实验, 2003, 23(10): 43-47.
- [2] 朱业俊, 陶小平, 孙腊珍. 赫姆霍兹线圈磁场的探究 [J]. 物理实验, 2010, 30(3): 42-47.
- [2] 朱力奥. 匀强磁场产生装置的设计 [J]. 大学物理, 2014, 33(4): 49-52.
- [3] 殷恭维, 唐列娟, 吴书朝. 产生匀强磁场的球状线圈设计 [J]. 电工技术学报, 2007, 22(1): 33-35.

Uniform magnetic field based on improved Helmholtz coils

GUO Yu-chuan^a, TUO Yan-bin^b, WEN Xiao-hui^b, KANG Ming-ming^a

(a. College of Physics Science and Technology; b. School of Electrical Engineering and Information, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: Based on the fundamental analysis of the magnetic uniformity of Helmholtz coil, the conditions were obtained to get a higher uniformity of the magnetic field. By using adding a set of co-axial parallel minor-radius Helmholtz coil, a new device which could generate not only a greater but also a highly uniform magnetic field was proposed. The axial and spatial distributions of the magnetic field were described with the help of numerical simulation, showing its superiority compared with the ordinary Helmholtz coil.

Key words: Helmholtz coil; magnetic induction intensity; uniform magnetic field

[责任编辑:郭 伟]